単調作用素と一様近似

Theorem. (Korovkin) 有界閉区間 $[a,b]$ 上の実数値連続関数の集合を $C([a,b],\mathbb{R}) = C[a,b]$（一様ノルムの位相で Banach 空間）とする. また $C[a,b]$ 上の線形作用素 L が単調であるとは, $f \geq g, f, g \in C[a,b]$ のとき $Lf \geq Lg$ が成り立つことである.

$\{L_n\}$ を $C[a,b]$ 上の単調線形作用素列とする. このとき, 以下の (i),(ii),(iii) は同値である.

(i) $\forall f \in C[a,b]$ に対して一様に $L_n f \to f$ $(n \to \infty)$ が成り立つ.

(ii) $e_0(x) = 1, e_1(x) = x, e_2(x) = x^2$ に対して一様に $L_n e_k \to e_k$ $(n \to \infty, k = 0,1,2)$

(iii) 一様に $L_n e_0 \to e_0$ $(n \to \infty)$ かつ $t \in [a,b]$ に関して一様に $(L_n \phi_t)(t) \to 0$ $(n \to \infty)$ が成り立つ. ただし, $\phi_t(x) = (t-x)^2$ である.

Proof. $C[a,b]$ 上のノルムを $\|f\| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$ とする.

(i)$\Longrightarrow$(ii) 明らか.

(ii)$\Longrightarrow$(iii) $\phi_t = t^2 e_0 - 2te_1 + e_2$ より, $L_n \phi_t = t^2 L_n e_0 - 2t L_n e_1 + L_n e_2$ となる. よって三角不等式から

$$\begin{aligned}(L_n\phi_t)(t) &= t^2((L_n e_0)(t) - 1) - 2t((L_n e_1)(t) - t) + ((L_n e_2)(t) - t^2) \\ &\leq t^2 \|L_n e_0 - e_0\| + 2|t| \|L_n e_1 - e_1\| + \|L_n e_2 - e_2\|\end{aligned}$$

が成り立つ. ここで $t^2, 2|t|$ は $[a,b]$ で最大値をとるから, (ii) より $n \to \infty$ のとき, t に関して一様に $(L_n\phi_t)(t) \to 0$ となる.

(iii)$\Longrightarrow$(i) $f \in C[a,b]$ とする. f は $[a,b]$ 上で一様連続であるから, $\forall \varepsilon > 0$ に対して, $\forall x, y \in [a,b], |x-y| < \delta$ ならば $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ を満たす $\delta > 0$ が存在する. ここで $\alpha = 2\|f\|\delta^{-2}$ とし, $t \in [a,b]$ を任意に選び固定する.

もし $|t-x| < \delta$ ならば $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$ であり, $|t-x| \geq \delta$ ならば

$$|f(t) - f(x)| \leq 2\|f\| \leq 2\|f\| \frac{(t-x)^2}{\delta^2} = \alpha\phi_t(x)$$

であるから, $\forall x \in [a,b]$ に対して $-\varepsilon - \alpha\phi_t(x) \leq f(t) - f(x) \leq \varepsilon + \alpha\phi_t(x)$ つまり

$$-\varepsilon e_0 - \alpha\phi_t \leq f(t)e_0 - f \leq \varepsilon e_0 + \alpha\phi_t$$

が成り立つ. よって L_n の単調性および線形性, 絶対値の性質から

$$\begin{aligned}|f(t)(L_n e_0)(t) - (L_n f)(t)| &\leq |\varepsilon(L_n e_0)(t) - \alpha(L_n\phi_t)(t)| \\ &\leq \varepsilon|(L_n e_0)(t)| + \alpha|(L_n\phi_t)(t)| \\ &\leq \varepsilon\|L_n e_0 - e_0\| + \varepsilon + \alpha(L_n\phi_t)(t)\end{aligned}$$

と評価できる. ここで (iii) より n を十分大きく選べば

$$\|L_n e_0 - e_0\| \leq 1, \alpha(L_n\phi_t)(t) \leq \varepsilon$$

を満たすから, n が十分大きいとき

$$|f(t)(L_n e_0)(t) - (L_n f)(t)| \leq 3\varepsilon$$

となり, $n \to \infty$ のとき $|f(t)(L_n e_0)(t) - (L_n f)(t)| \to 0$ $(\forall t \in [a,b])$ となることがわかる. ゆえに三角不等式から

$$\begin{aligned}
|(L_n f)(t) - f(t)| &\leq |(L_n f)(t) - f(t)(L_n e_0)(t)| + |f(t)(L_n e_0)(t) - f(t)| \\
&\leq |(L_n f)(t) - f(t)(L_n e_0)(t)| + \|f\| \, \|L_n e_0 - e_0\| \\
&\to 0 \ (n \to \infty)
\end{aligned}$$

が得られる. ゆえに $L_n f$ は f に一様に収束することがわかる.

以上より定理が示された. ■